

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé
et $A, B \in \mathcal{F}$

I - Notion d'indépendance

1) Probabilités conditionnelles et événements indépendants

Def 1: ^{si $P(A) \neq 0$} Θ_n note P_A l'application

$$P_A : \begin{cases} \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \\ B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases}$$

Pr. P2: P_A est une probabilité pour $(\Omega, \mathcal{F})$
on l'appelle la probabilité conditionnelle sachant A.

Thm 3: (Formule des Probabilités Totales)

Soit I au plus dénombrable et $(\Omega_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements, Alors

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) = \sum_{i \in I} P(A | \Omega_i) \cdot P(\Omega_i)$$

Ex 4: On dispose de deux urnes U_1 contenant 2 boules rouges et 3 boules blanches, et U_2 contenant 4 rouges et 1 blanche. Alors si on choisit une urne aux hasards avec équiprobabilité, la probabilité de tirer une boule rouge est

$$P(R) = P(R | U_1) P(U_1) + P(R | U_2) P(U_2) = 3/5$$

Thm 5: (Formule de Bayes)

En reprenant $I, (\Omega_i)_{i \in I}$ du Thm 3 on a si $P(A) \neq 0$

$$\forall i \in I, P(\Omega_i | A) = \frac{P(A | \Omega_i) P(\Omega_i)}{\sum_{i \in I} P(A | \Omega_i) P(\Omega_i)}$$

Def 6: Θ_n dit que A et B sont indépendants ($A \perp B$)
dès lors que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Prop 7: $A \perp B$ ssi $P(B | A) = P(B)$
si $P(A) > 0$

Prop 8: $A \perp B$ ssi $A^c \perp B$ ssi $A \perp B^c$ ssi $A^c \perp B^c$

Def 9: Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I$ avec I quelconque
 Θ_n dit que $(A_i)_{i \in I}$ est (mutuellement) indépendante
dès lors que pour tout $J \subset I$ fini

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

ex 10: Si on note A l'événement "le résultat du 1^{er} dé est pair", B l'événement "le résultat du 2^d dé est impair", C l'événement "la somme des deux résultats est paire".
Alors (A, B, C) est deux à deux indépendante mais non mutuellement indépendante

Thm 11: (Borel-Cantelli)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, alors:

i) si $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$ alors $P(\limsup A_n) = 0$

ii) si $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = \infty$ et (A_i) est indépendante, alors $P(\limsup A_n) = 1$

2) Indépendance de tribus

Def 12: Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes si $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Def 13: Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-tribus de $\mathcal{F}$, on dit que (A_i) est (mutuellement) indépendante si pour tout $J \subset I$ fini, on a

$$\forall (A_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} A_j \quad P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Def 14: (π -système)

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{C}$ est un π -système si $\mathcal{C}$ est stable par intersection.

Ex 15: Toute tribu est un π -système

$\{]-\infty; t]; t \in \mathbb{R}\}$ est également un π -système

Thm 16: Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux π -systèmes tels que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D} \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Alors $\sigma(\mathcal{C})$ et $\sigma(\mathcal{D})$ sont indépendantes

Thm 17: Soit (A_i) une famille quelconque de sous-tribus de $\mathcal{F}$

Soit $J, K \subset I$ disjoints, alors

$\sigma(A_j; j \in J)$ et $\sigma(A_k; k \in K)$ sont indépendantes

3) Indépendance de variables aléatoires

Def 18: Soit X une variable aléatoire réelle, on définit la tribu engendrée par X : $\sigma(X) = \{X^{-1}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Def 19: On dit que $(X_i)_{i \in I}$ est indépendante dès lors que $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ l'est

Thm 20: Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a. indépendantes et

$(f_i)_{i \in I}$ des applications mesurables de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Alors $(Y_i = f_i(X_i))_{i \in I}$ est indépendante.

Ex 21: Si X, Y, Z des v.a. indépendantes, alors $(\cosh(X), Y^2, e^Z)$ est indépendante.

Thm 22: Soit $(X_i)_{i \in I}$ des v.a., on a équivalence entre:

i) $(X_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante

ii) $P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$

Thm 23: Soit $(X_i)_{i \in I}$ des v.a., on suppose qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n$ des mesures de probabilités $\mu_1, \dots, \mu_n$ sur $\mathbb{R}$

i) les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes

Alors

ii) Pour $i \in I, n \in \mathbb{N}$, $P_{X_i} = \mu_i$

II - Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

2) Calcul des moments

Thm 24: Soit X, Y deux v.a. n indépendantes et L^1 , alors $XY \in L^1$ et $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

Def 25: Si X, Y deux v.a. n sont dans L^2 , on définit

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Prop 26: Si X, Y sont deux v.a. n indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ en particulier, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Thm 27: Si X, Y sont deux v.a. n indépendante (sous P), alors

$$P_{X+Y} = P_X * P_Y$$

Ex 28: Si X, Y sont deux v.a. n indépendantes telles que $Y, X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $Z = X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$

2) Stabilité des lois et fonctions caractéristiques

Thm 29: Soit X, Y deux v.a. n indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$ si G_X est la fonction génératrice de X

thm 30: la Fonction génératrice caractérise la loi

Prop 31: Soit $\lambda, \mu > 0$ $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$ indépendantes,
alors $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$ DEV 1

thm 32: (Indécomposabilité de la loi de Poisson)
Soit $\lambda > 0$, X, Y deux v.a.d indépendantes telles que

$X + Y \sim P(\lambda)$, alors X, Y suivent des lois de Poisson

thm 33: Soit X, Y deux v.a.r indépendantes, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

Ex 34: Soit $X \sim B(n, p)$ $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = (1 + p(e^{it} - 1))^n$$

thm 35: la Fonction caractéristique caractérise la loi

Ex 36: Si $\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases}$ Alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

III - Théorèmes limites

1) loi du 0-1 de Kolmogorov

Def 37: Soit $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sous tribus de $\mathcal{F}$ indépendantes
On définit $\mathcal{T}$ la tribu asymptotique $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \mathcal{T}_k\right)$

thm 38: (loi du 0-1 de Kolmogorov)
La tribu asymptotique $\mathcal{T}$ associée à une suite de sous tribus indépendantes (sous $\mathbb{P}$) est $\mathbb{P}$ -triviale.
(ie $\forall A \in \mathcal{T} \quad \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$)

Ex 39: Soit (X_n) une suite de v.a iid $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, on pose pour $n \geq 1$.

$Y_n = X_1 + \dots + X_n$, Alors p.s $\begin{cases} \sup S_n = +\infty \\ \inf S_n = -\infty \end{cases}$

2) loi des grands nombres

thm 40: (loi faible des grands nombres)
Soit (X_n) une suite de v.a. ^{indépendantes} de même loi et L^2

$$\text{Alors } \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{IP}} \mathbb{E}[X_1]$$

thm 41: (loi forte des grands nombres)

Soit (X_n) une suite de v.a iid et L^1 ,

$$\text{Alors } \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s}} \mathbb{E}[X_1]$$

3) Théorème Central limite

lemme 42: $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \quad \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[\varphi(X)]$

théorème 43: (Paul-Levy)

$$X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X(t)$$

théorème 44: (TCL)

Soit (X_n) iid dans L^2 , on note $\begin{cases} \mu = \mathbb{E}[X_1] \\ \sigma^2 = \text{var}(X_1) \end{cases}$

$$\text{Alors } S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma} - \mu \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$$

DEV 2